Transition Maths and Algebra with Geometry

Tomasz Brengos

Lecture Notes
Electrical and Computer Engineering

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!

Contents

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!

Continuous functions

Definition

A function $y = f(x)$ is said to be *continuous at a point a* of its domain if

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Remark

Note that in the above definition the value $f(a)$ and the limit $\lim_{x\to a} f(x)$ have to exist.

If $y = f(x)$ is not continuous at a then a is called a discontinuity point.

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

KAPITAŁ LUDZKI CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!

Continuous functions

Definition

A function $y = f(x)$ is *continuous* if it is continuous at every point of its domain.

Example:
A function $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ is continuous at every point of its domain $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
KAPITAŁ LUDZKI CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!

Contents

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
KAPITAŁ LUDZKI CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!

Propierties of continuous functions

Theorem

Let $y = f(x)$ and $y = g(x)$ be two functions continuous at a point a. Then:

- $f \pm g$ is continuous at a,
- $f \cdot g$ is continous at a,
- $\frac{f}{g}$ is continous at a if $g(a) \neq 0$

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

KAPITAŁ LUDZKI CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!

Propierties of continuous functions

Theorem

If $y = f(x)$ is continuous at a and $y = g(x)$ is continuous at $f(a)$. Then their composition

$$y = g \circ f(x) = g(f(x))$$

is continuous at a.
If $y = f(x)$ and $y = g(x)$ are continuous then so is $g \circ f$.

Theorem

All elementary functions defined during the previous lecture are continuous.

Propierties of continuous functions

Intermediate Value Theorem

Let $y = f(x)$ be a function continuous on a closed interval $[a, b]$. Then $y = f(x)$ takes on every value between $f(a)$ and $f(b)$. In other words, if $y = f(x)$ is continuous on $[a, b]$ and y_0 lies between $f(a)$ and $f(b)$ then this means that there is a point $x_0 \in [a, b]$ for which $f(x_0) = y_0$.

Corollary

If $y = f(x)$ is continous on $[a, b]$ and the values $f(a)$ and $f(b)$ differ in sign then there is at least one argument $x \in [a, b]$ for which $f(x) = 0$.

POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ
FUNDUSZ SPOŁECZNY
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!

Propierties of continuous functions

Example:
Consider a function $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$ on $[-1, 2]$. Clearly, $f(-1) < 0$ and $f(2) > 1$. This means that there is $x \in (1, 2)$ for which $f(x) = 0$. We may use divide and conquer procedure to find a better estimate of a root.

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
KAPITAŁ LUDZKI CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!